تمرین سری دوم

موضوع: حرکت تحت نیروی مرکزی

زمان و مکان تحویل : یکشنبه ۹۲/۱۲/۱۸ در کلاس حل تمرین.

---

۱- در این مسئله به بررسی روشی می پردازیم که کاوشگر های فضایی برای شتاب گرفتن در جهت مورد نظر خود معمولا از آن استفاده می کنند.کاوشگر فضایی در حوالی یک سیاره حرکت می کند و می تواند با گرفتن مقدار خیلی کمی انرژی از حرکت مداری سیاره سرعتش را به طور چشمگیری زیاد کند و همچنین جهت حرکت خود را به طور قابل ملاحضه ای تغییر دهد. در این مسئله به تحلیل این اثر روی یک کاوشگر فضایی که از حوالی مشتری می گذرد می پردازیم.

- مدار سیاره مشتری دور خورشید را می توان با تقریب یک دایره در نظر گرفت.

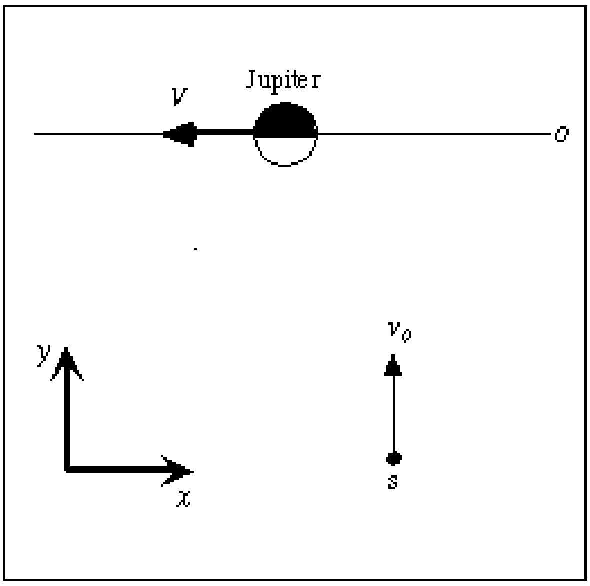
الف- سرعت مشتری (v) در مدارش به دور خورشید را بیابید.

ب- هنگامی که کاوشگر بین خورشید و مشتری است.( روی خط واصل خورشید و مشتری) فاصله ای از مشتری را بیابید که جاذبه گرانشی مشتری و خورشید برابر می شود.

یک کاوشگر فضایی به جرم $m = 825\ kg$ در حوالی مشتری پرواز می کند برای سادگی فرض کنید که مسیر کاوشگر به طور کامل در صفحه مدار مشتری قرار داد همچنین تنها به بررسی حالتی می پردازیم که نیروی گرانش مشتری بر سایر نیروهای گرانشی غالب است.

در چارچوب مرجعی که مبدا آن منطبق بر مرکز جرم خورشید است ، سرعت اولیه کاوشگر برابر با $v_0 = 1.00 \times \frac{10^4 m}{s}$ ( در جهت مثبت محور y) در حالی که سرعت مشتری در جهت منفی محور x است. منظور از سرعت اولیه کاوشگر، سرعت در فضای میان سیاره ای است که هنوز از متشری دور است ولی نیروی جاذبه گرانشی خورشید در مقایسه با نیروی جاذبه مشتری قابل صرف نظر کردن می باشد.

- فرض می کنیم رویارویی در یک زمان نسبتا کوتاه رخ می دهد به طوری که می توانیم از تغییرجهت مشتری در مدارش به دور خورشید صرف نظر کنیم.



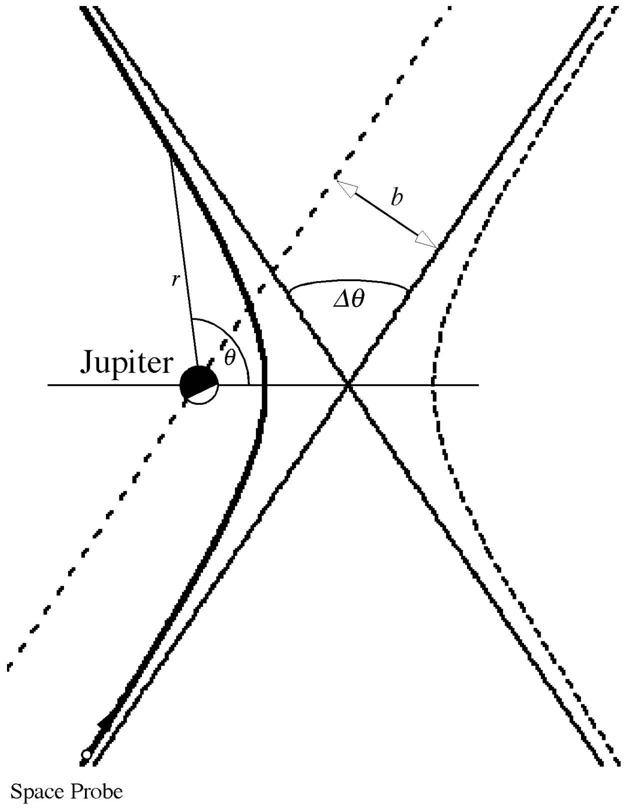
پ- اگر سرعت کاوشگر نسبت به مشتری را $v'$ بنامیم در این صورت جهت بردار $v'$ با محور x زاویه $\theta_0$ را می سازد. مقدار $v'$ و $\theta_0$ را تعیین کنید.

ت- مقدار انرژی مکانیکی کل کاوشگر (E) را در چارچوب مرجع مشتری بدست آورید.معمولا انرژی پتانسیل گرانشی را در فواصل بسیار زیاد برابر با 0 در نظر می گیریم.

همانطور که می دانید مسیر کاوشگر در چارچوب مرجع مشتری یک هذلولی است و معادله آن در دستگاه قطبی چنین است.

$$\frac{1}{r}=\frac{GM}{v'^2 b^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2Ev'^2 b^2}{G^2M^2m}}\cos\theta\right)$$

که در معادله فوق b فاصله بین یکی از مجانبهای هذلولی و مشتری است( که آن را پارامتر برخورد می نامیم) Mجرم مشتری ، r و θ نیز به ترتیب بردار حامل کاوشگر و زاویه بردار در دستگاه قطبی می باشند.




ث- با استفاده از معادله ۱ انحراف زاویه ای کل کاوشگر در چارچوب مرجع مشتری (Δθ) را برحسب $v'$ و b به دست آورید.

ج- اکنون فرض کنید که کمترین فاصله مشتری با کاوشگر ( حضیض مداری کاوشگر) برابر با $3R_j$ باشد( منظور از $R_j$ شعاع مشتری است) با توجه به این فرض مقدار b و Δθ را بیابید.

چ- رابطه ای برای سرعت نهایی کاوشگر در چارچوب مرجع خورشید ($v''$) تنها برحسب پارامتر های (Δθ ، $v$ و $v_0$) به دست آورید.

ح- با استفاده از نتیجه قسمت قبل ، مقدار عددی $v''$ را بدست آورید.

- برای حل این مسئله می توانید از داده ها ی زیر استفاده کنید.

Gravitational constant: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ m$^3$/(kg·s$^2$)

Sun mass: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30}$ kg

Jupiter mass: $M = 1.901 \cdot 10^{27}$ kg

Equatorial Jupiter radius: $R_B = 69.8$ Mm

Average radius of Jupiter's orbit: $R = 7.783 \cdot 10^{11}$ m

۲- همانطور که می دانیم بیشتر ستاره ها یک سیستم دوتایی را تشکیل می دهند. یک نوع از این سیستم های دوتایی شامل یک ستاره عادی به جرم $m_0$ و یک ستاره نوترونی متراکم و بسیار سنگین به جرم M است که به دور یکدیگر می چرخند. فرض کنید که $M>>m_0$ است، درنتیجه ستاره عادی روی یک مدار دایره ای به شعاع $r_0$ به دور ستاره نوترونی می چرخد.

الف- دوره تناوب گردش ستاره عادی را به دور ستاره نوترونی برحسب پارامتر های معلوم شده در مسئله بدست آورید.

اکنون فرض کنید که ستاره عادی شروع به گسیل گاز به طرف ستاره نوترونی می کند و سرعت گسیل گاز نسبت به ستاره عادی برابر با $V_0$ است. این امر موجب ورود ستاره عادی به یک مدار جدید می شود.

ب- کمترین فاصله این ۲ ستاره در مدار جدید ( $r_f$ ) را بیابید.

- فرض کنید که در این مسئله نیروی گرانشی ستاره نوترونی نیروی غالب است و از تغییرات لحظه ای مدار ستاره ی عادی چشمپوشی کنید.

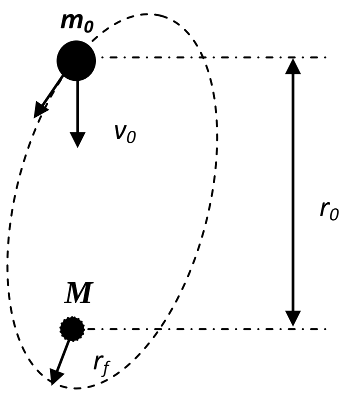



Fig. 2

۳- یک ماهواره به جرم $M_s$ در مداری دایروی به شعاع R در حال گردش حول کره ی زمین می باشد.شکل زمین را کروی جرم آن را $M_e$ بگیرید. همچنین تنها نیروی موثر وارد بر ماهواره را نیروی گرانشی زمین در نظر می گیریم.

الف)سرعت حرکت ماهواره در مدار($V_0$) و انرژی مداری آن ($E_0$) را بر حسب پارامتر های مسئله تعیین کنید

در یک لحظه یک شهاب سنگ با جرم $\frac{Ms}{10}$ و با سرعت اولیه $\overrightarrow{Vm} = Vm\,(-\hat{r})$ ( به صورت شعاعی ) با ماهواره برخورد می کند و پس از برخورد به ماهواره می چسبد. فرض می کنیم که مدت زمان برخورد($\delta T$) , نسبت به دور تناوب مداری بسیار کوچک است. به طوری که می توان تکانه خطی سیستم را در حین برخورد پایسته در نظر گرفت.

ب)بردار سرعت جدید مجموعه ماهواره و شهاب سنگ ( $\overrightarrow{Vf}$ ) را بدست آورید.

پ) می دانیم که ماهواره  و شهاب سنگ پس از برخورد, در یک مدار جدید قرار می گیرند.  با  توجه به جواب بدست آمده در قسمت ب, تکانه ی زاویه ای مجموعه (L) و همچنین  انرژی مداری آن (E)  را بدست آورید.

ت) با توجه به رابطه ای که برای انرژی مداری بدست آورده اید. حداکثر سرعت اولیه شهاب سنگ را به گونه ای تعیین کنید , تا مدار جدید بسته بماند.

ث) اکنون فرض کنید  که $V_m<(V_m)_{max}$ , بنابراین مدار نهایی بسته و بیضی شکل خواهد بود.  پارامتر های هندسی این مدار( نیم قطر بزرگ و خروج از مرکز آن ) را بدست آورید.

راهنمایی : معادلات مربوط به تکانه زاویه ای و انرژی را که  در قسمت  پ بدست آورده اید را  برا ی نقاط اوج و حضیض مداری جایگذاری کنید و با استفاده از آن طول حضیض و اوج را بدست آورید.