بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تمرین سری اول مکانیک تحلیلی ۲

موضوع : حرکت تحت نیروی مرکزی.

زمان و مکان تحویل : یکشنبه ۱۱ ام اسفند ماه در کلاس های حل تمرین.

۱- دو جسم به جرم های m_1 وm_2 را در نظر بگیرید. برای این ۲ جسم مفروضات زیر برقرار است.

- ۲جرم را نقطه ای در نظر می گیریم، به عبارت دیگری فواصل اجسام در برابر ابعاد آنها بسیار بزرگ است.
- تنها برهم کنش موثر بین ۲ جسم، نیروی گرانشی بین آن دو $\vec{f}(r)$ می باشد.

بردار حامل جسم ۱ و ۲ را از مرکز جرم به ترتیب $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ نامگذاری می کنیم.

الف- معادلات مربوط به $\ddot{\vec{r_1}}$ و $\ddot{\vec{r_2}}$ را بر حسب پارامتر های مشخص شده در مسئله بنویسید.

بردار $\vec{r}$ را به صورت $\vec{r_2}-\vec{r_1}$ تعریف می کنیم. واضح است که این پارامتر، بردارحامل جسم ۲ از دید جسم ۱ می باشد.

ب- نشان دهید که معادله $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(r)$ برقرار می باشد. که در آن μ ثابتی است که باید تعیین شود.

- μ را به اصطلاح جرم کاهیده می نامیم. در واقع توانستیم با تغییر متغیر قسمت ب یک مسئله ۲ متغیره را با یک مسئله تک متغیره و یک جسم معادل سازی کنیم.

پ- معادله شتاب بدست آمده در قسمت ب را به دو بخش شعاعی و زاویه ای تقسیم کنید. با کمک معادله بخش زاویه ای نشان دهید که $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0$. که در آن زاویه θ بردار حامل در دستگاه قطبی می باشد.

درواقع پارامتر $r^2\dot{\theta}$ یک ثابت حرکت می باشد.(این ثابت را l می نامیم.)

ت- پارامتر انرژی (E) را به صورت مقابل تعریف می کنیم

$$E=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

ث- نشان دهید که E یک ثابت حرکت می باشد.

اکنون می خواهیم معادله انرژی را به یک معادله شعاعی (صرفا وابسته به r) تبدیل کنیم. برای این منظور مقدار مربوط به $\dot{\theta}$ را بر حسب l و r بازنویسی کرده و در معادله انرژی جایگذاری کنید. و نشان دهید که معادله انرژی به صورت زیر تبدیل می شود.

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2\right) + \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}\left(r\right)$$

ج- تابع $\mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(r)$ را تعیین کرده و آن را بر به طورکیفی رسم کنید. مفهوم فیزیکی این تابع چیست؟

چ- اکنون با توجه به نمودار قسمت "ج" برای مقادیر مختلف E ، در مورد دینامیک مربوط به پارمتر r به طور کیفی بحث کنید.

ح- مقادیر اولیه $\overrightarrow{r_1}$ و $\overrightarrow{r_2}$ را بگونه ای تعیین کنید که معادله $\frac{d}{dr}\left(U_{eff}(r)\right) = 0$ برقرار باشد.

خ- مقادیر اولیه بردار سرعت های دو جسم،نسبت به مرکز جرم را بگونه ای تعیین کنید تا معادله قسمت ح درتمامی زمان ها برقرار باشد. برای این حالت $\overrightarrow{r_1}(t)$ و $\overrightarrow{r_2}(t)$ را تعیین کنید.

اکنون فرض کنید اندازه بردار اولیه جسم ۱ به مقدار $\delta\mathrm{r}$ با مقدار بدست آمده در قسمت ح متفاوت باشد.(راستای بردار همان راستای قبلی است.)

د- بردار های $\overrightarrow{r_1}(t)$ و $\overrightarrow{r_2}(t)$ را تا اولین مرتبه غیر صفر $\delta\mathrm{r}$ بدست آورید.

۲- ذره ای را تحت میدان گرانشی $\frac{1}{r^2}$ در یک مدار بیضوی در حال حرکت است. میانگین زمانیِ انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی جنبشی را در یک دوره تناوب حساب کنید و بر حسب ثابتهای فیزیکی و هندسی مدار بنویسید. سپس نشان دهید که نتایج شما در قضیه ویریال صدق میکند.

۳- ذره ای به جرم m مقید است که بر روی سطح مخروطی به معادله $r^2 = 4az$ در دستگاه استوانه‌ای حرکت کند. چنانچه تحت تاثیر میدان گرانشی یکنواخت قرار داشته باشد، بسامد نوسانات کوچک حول مداری به شعاع $R = \sqrt{4az_0}$ را به دست آورید.