بسمه تعالی

پاسخ تمرین سری هفتم - درس نسبیت خاص- ترم پاییز ۱۳۹۳

پاسخ ۴.۲) چهارتکانه فوتونی که به ناظر می‌رسد در دستگاه S هست: (جهت محور x را جهت $\vec{u}$ بگیرید)

$$k^{\mu} = (E, \vec{p}) = (E, E\hat{r}) \tag{1}$$

که $\hat{r}$ جهت حرکت فوتون است. ناظر S' چهارتکانه فوتون را با یک تبدیل لورنتس با سرعت $\vec{u}$ می‌بیند:

$$k'^{\mu} = (\gamma(E - uE\hat{r}.\hat{x}), \gamma(E\hat{r}.\hat{x} - uE), E\hat{r}.\hat{y}) \tag{2}$$

بنابراین ناظر انرژی فوتون را به مقدار

$$E' = \gamma E(1 - u\hat{n}.\hat{x}) = \gamma E(1 - u_r) \tag{3}$$

پاسخ ۴.۴) جهان خط‌های

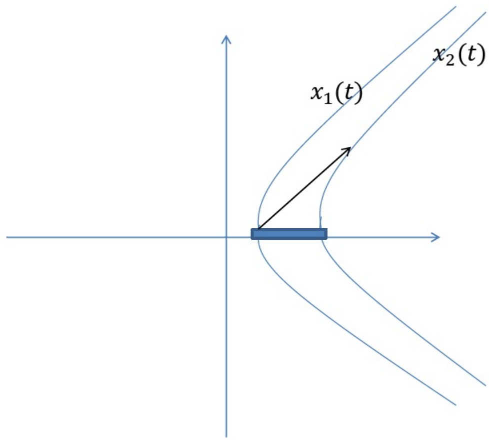
$$\begin{aligned} x_1^2 - t^2 &= X_1^2 \\ x_2^2 - t^2 &= X_2^2 \end{aligned} \tag{4}$$

حرکت با شتاب ثابت میله‌ای به طول $X_2 - X_1$ (در دستگاه سکون خودش) را توصیف می‌کند.[1] اگر در لحظه‌ای مطابق شکل سر X_1 پالسی را به دیگر سر میله منتقل کند، در دستگاه موضعا ساکن این سیگنال تقریبا مدت زمان l طول می‌کشد تا به سر دیگر برسد. در این مدت زمان سرعت سر دیگر میله از مقدار صفر بزرگتر شده است که این سرعت هست:

$$x\dot{x} - 2t = 0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{t}{\sqrt{X_2^2 + t^2}} = \frac{l}{X_2} \tag{5}$$

دقت کنید میله باید نسبت به طول منتسب به شتاب ذره ($\frac{c^2}{a}$) خیلی کوچکتر باشد، برای همین از $(\frac{l}{X_2})^2$ صرف نظر کردیم. به دلیل این سرعت، سر دیگر میله نور دریافتی را انتقال به سرخ شده می‌بینند:

$$\frac{\nu'}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}} \sim (1 - v) = 1 - \frac{l}{X_2} = \frac{X_1}{X_2} \tag{6}$$



۴.۱۲) مطابق شکل چهارتکانه فوتون فرودی در دستگاه S هست:

$$k_1^{\mu} = (E_1, \vec{p}_1) = (E_1, -E_1 \cos\theta, -E_1 \sin\theta) \tag{7}$$

همین طور برای فوتون بازتاب شده داریم:

$$k_2^{\mu} = (E_2, \vec{p}_1) = (E_2, E_2 \cos\phi, -E_2 \sin\phi) \tag{8}$$

[1] برای توضیح بیشتر به مطلب تکمیلی پیوست شده موجود در نوار سمت راست سایت مراجعه کنید

اما در دستگاه متصل به آینه، این چهارتکانه ها تبدیل می‌شوند به:

$$k^{\mu}_{1'} = (\gamma(E_1 + uE_1\cos\theta), \gamma(-E_1\cos\theta - uE_1), -E_1\sin\theta) \tag{9}$$
$$k^{\mu}_{2'} = (\gamma(E_2 - uE_2\cos\phi), \gamma(E_2\cos\phi - uE_2), -E_2\sin\phi)$$

در دستگاه متصل به آینه روشن است که قاعده تابش و بازتاب برقرار است و فرکانس فوتون ورودی و خروجی برابر هستند پس:

$$E_1(1 + u\cos\theta) = E_2(1 - u\cos\phi) \tag{10}$$
$$E_1(-\cos\theta - u) = -E_2(\cos\phi - u) \tag{11}$$
$$E_1\sin\theta = E_2\sin\phi \tag{12}$$

در نتیجه:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sin\phi}{\sin\theta} = \frac{\cos\phi - u}{\cos\theta + u} = \frac{1 - u\cos\phi}{1 + u\cos\theta} \tag{13}$$

۴.۱۸) این جا از روش چهاربردارها مسئله را حل می‌کنیم. دو فوتون در نظر بگیرید که از مبداء تابیده می‌شوند چهاربردار یکی به صورت:

$$k^{\mu}_1 = (E, E\hat{k}) = (E, E(\cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y})) \tag{14}$$

و دیگری با زاویه کوچک $d\alpha$ نسبت به اولی پرتاب می‌شود: ($\alpha' = \alpha + d\alpha$)

$$k^{\mu}_2 = (E, E(\cos\alpha'\hat{x} + \sin\alpha'\hat{y})) \tag{15}$$

در دستگاه مختصاتی که با سرعت v موازی محور x حرکت می‌کند:

$$k'^{\mu}_1 = (\gamma(E - vE\cos\alpha), \gamma(E\cos\alpha - vE), E\sin\alpha) \tag{16}$$

در نتیجه:

$$k'^{\mu}_2 = (\gamma(E - vE\cos\alpha'), \gamma(E\cos\alpha' - vE), E\sin\alpha') = k'^{\mu}_1 + d\alpha(vE\gamma\sin\alpha, -\gamma E\sin\alpha, E\cos\alpha) \tag{17}$$

زاویه بین دو بردار $\vec{k'_1}, \vec{k'_2}$ که در واقع زاویه بین دو فوتون از دید ناظر متحرک است می‌شود:

$$sin(d\alpha') \sim d\alpha' = \frac{|\vec{k'_1} \times \vec{k'_2}|}{|\vec{k'_1}||\vec{k'_2}|} = \frac{\gamma E^2(1 - v\cos\alpha)}{\gamma^2 E^2(1 - v\cos\alpha)^2} d\alpha = \frac{1}{\gamma(1 - v\cos\alpha)} d\alpha \tag{18}$$

از طرفی از معادله ۱۷ واضح است که فرکانس دو فوتون (که انرژی شان در دستگاه دوم تقریبا مساوی است) در دستگاه دوم هست:

$$E' = \gamma E(1 - vcos\alpha) \Rightarrow (\frac{d\alpha}{d\alpha'}) = \frac{E'}{E} = \gamma(1 - v\cos\alpha) \tag{19}$$

۴.۲۰) مطابق شکل، فرض کنید در دستگاه مختصات S فوتون‌ها که به صورت همگن پخش شده اند در راستای $(cos\theta, sin\theta, 0)$ حرکت می‌کنند. دستگاه S' هم با سرعت v در راستای x حرکت می‌کند. فرض کنید صفحه‌ای با مساحت A از عمود بر محور x و ثابت در دستگاه S داریم. تعداد فوتونی که در یک بازه زمانی Δt به این صفحه برخورد می‌کند به وضوح هست:

$$\Delta N = \rho c\cos\theta A\Delta t \tag{20}$$

دستگاه S' این رویداد را بدین شکل تفسیر می‌کند که صفحه با مساحت A با سرعت $-v$ حرکت می‌کند و فوتون‌ها با سرعت نسبی $\vec{c'} + \vec{v} = c(\cos\theta', \sin\theta') + v(0, 1)$ در مدت زمان $\Delta t' = \gamma\Delta t$ به آن برخورد می‌کنند. در نتیجه تعداد فوتون‌هایی که به سطح می‌رسند هست:

$$\Delta N' = \rho'(c\cos\theta' + v)A\Delta t' = \rho'(c\cos\theta' + v)\gamma A\Delta t \tag{21}$$

از طرفی از قانون ابیراهی نور می‌دانیم: (برای سهولت سرعت نور را واحد بگیرید)

$$\cos\theta = \frac{v + \cos\theta'}{v\cos\theta' + 1} \tag{22}$$

امّا از آن جا که تعداد فوتونهای برخوردی یک پدیده فیزیکی است باید داشته باشیم $\Delta N = \Delta N'$ پس:

$$\gamma\rho'(cos\theta' + v) = \rho\cos\theta \Rightarrow \frac{\rho}{\rho'} = \gamma(1 + v\cos\theta') = \frac{\nu}{\nu'} \tag{23}$$

تصاویر آخر در بالا از این نتیجه می‌شود که فرکانس نور در دو دستگاه با رابطه

$$\nu = \nu'\gamma(1 + v\cos\theta') \tag{24}$$

به هم مرتبط می‌شوند.