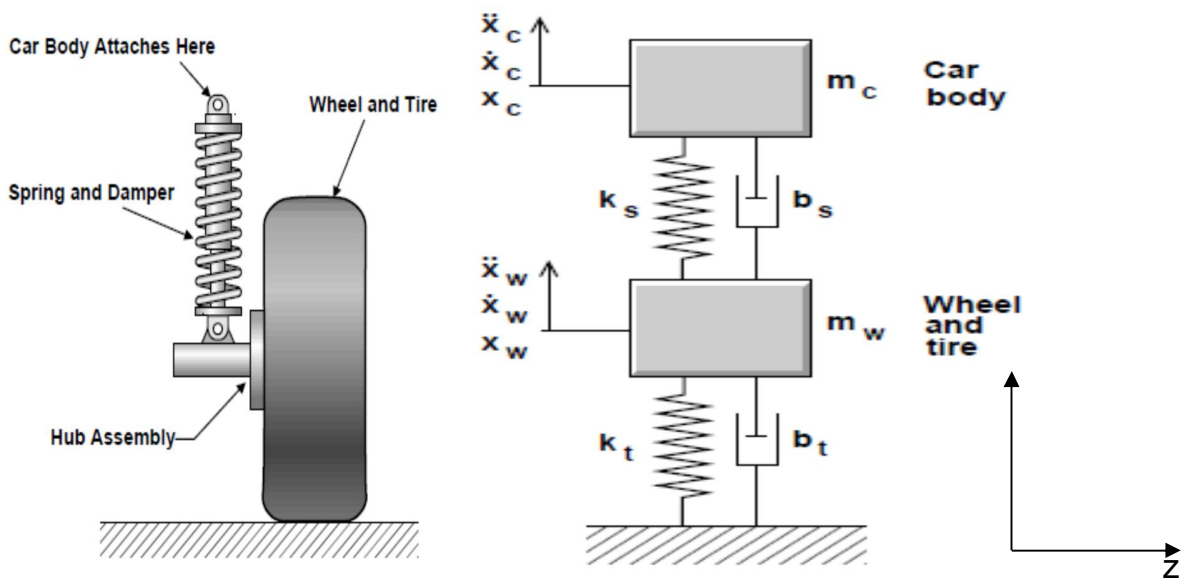


- ۱- یک صفحه همگن و نازک با چگالی ρ در نظر بگیرید که مرز آن با رابطه $r = ke^{\alpha\theta}$ بین زاویه های $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ مشخص شده است. چنانچه صفحه مورد نظر در صفحه $x_1 - x_2$ قرار گرفته باشد، تانسور لختی را برای این دستگاه که مرکز آن در $r = 0$ قرار گرفته است، به دست آورید. با اعمال دوران مناسب ممانهای اینرسی اصلی را به دست آورید.
- ۲- صفحه ای همگن و نازک با ممانهای اینرسی اصلی I_1 در راستای محور x_1 و $I_2 > I_1$ در راستای محور x_2 و $I_3 = I_1 + I_2$ در راستای محور x_3 را در نظر بگیرید. مبدا دستگاههای مختصات x_i و x_i' را بر هم منطبق است و در مرکز جرم واقع شده است. در لحظه $t = 0$ صفحه با سرعت زاویه ای Ω حول محوری که با صفحه زاویه α می سازد و بر محور x_2 عمود است، می چرخد در حالی که نیرویی به آن وارد نمی شود. چنانچه داشته باشیم $I_1/I_2 = \cos(2\alpha)$ نشان دهید که سرعت زاویه ای حول محور x_2 در زمان t از رابطه زیر به دست می آید.

$$\omega_2(t) = \Omega \cos \alpha \tanh(\Omega t \sin \alpha)$$

- ۳- سیستم تعلیق یا فنربندی قسمتی از خودرو است که باعث می شود نوسانات حاصل از حرکت خودرو بر روی سطوح ناهموار، به اتاق، شاسی، متعلقات و سرشینیان آن وارد نشود. سیستم تعلیق از جرم فنربندی شده، فنر، کمک فنر و جرم فنربندی نشده تشکیل شده است. در این مسئله می خواهیم یک مدل ساده برای سیستم تعلیق مستقل خودرو ارائه دهیم. این سامانه نوعی از سیستم تعلیق است که در آن هر چرخ به صورت جداگانه و مستقل ارتعاش می کند و ارتعاشات یک چرخ به چرخ دیگر منتقل نمی شود.

یک چرخ خودرو را همانند شکل زیر در نظر بگیرید. این چرخ به یک فنر با ضریب سختی K_s و یک میرا کننده با ضریب میرایی b_s متصل شده است. جرم تکیه کننده بر فنر و کمک فنر را که شامل سرشین و متعلقات اتوموبیل می باشد، m_c می نامیم.



در این مسئله چرخ خودرو را با یک جرم متصل شده به یک فنر با ضریب سختی K_t و یک میرا کننده با ضریب میرایی b_t ، مدل می کنیم. حرکت چرخ و اتوموبیل در راستای محور (عمود بر صفحه کاغذ) و نوسانات سیستم تعلیق در راستای محور X است. همچنین سطح محل حرکت اتوموبیل را هموار در نظر میگیریم.

جابجایی m_w و m_c را حول نقطه ی تعادل فنر ها به ترتیب X_w و X_c می نامیم.

الف) معادلات حرکت مربوط به m_w و m_c را بدست آورید. از جرم فنر ها و میرا کننده ها صرف نظر می کنیم.

ب) اکنون از این تغییر متغیر $X_1 = X_c$, $X_2 = X_w$, $X_3 = \dot{X}_c$, $X_4 = \dot{X}_w$ استفاده کنید و معادلات بدست آمده در قسمت قبل را بر حسب متغیر های جدید و مشتقات آن ها بنویسید.

بردار $\vec{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. با یک دقت ساده در معادلات قسمت قبل می توان دریافت که

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$$

که در آن A یک ماتریس 4×4 است.

پ) با توجه به معادلاتی که بدست آورده اید ماتریس A را تعیین کنید.

ت) معادله مربوط به تعیین ویژه مقادیر ماتریس A را بدست آورید (نیازی به حل معادلات نیست)

ث) ویژه مقادیر مربوط به ماتریس A را $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ و ویژه بردارهای متناظر با آن ها را به ترتیب V_1, V_2, V_3, V_4 می نامیم. جواب معادلاتی را که در قسمت الف بدست آورده اید را بر حسب این ویژه مقادیر و ویژه بردارها بنویسید.

اکنون فرض کنید که خودرو با سرعت ثابت V_0 بر روی یک سطح نا هموار که ناهمواری آن طبق معادله $a(z) = a_0 \sin(\omega_0 z + \pi/2)$ داده می شود حرکت می کند. فرض کنید که چرخ اتوموبیل در زمان $t = 0$ در $Z = 0$ قرار دارد و حرکت آن در جهت مثبت محور Z باشد.

ج) اکنون با فرض برقراری این شرط معادلاتی را که در قسمت الف برای جابجایی m_c و m_w بدست آورده اید را بازنویسی کنید.

* یک تخمین عدد مناسب برای کمیت های مسئله بدین صورت است

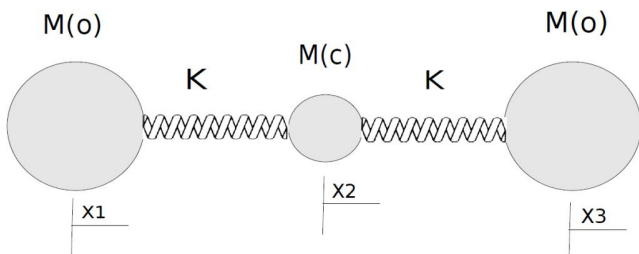
$$m_c = 1000 \text{ lb} \quad K_s = 200 \text{ lb/in} \quad b_s = 40 \text{ lb/(ft/sec)}$$

$$m_w = 175 \text{ lb} \quad K_t = 1600 \text{ lb/in} \quad b_t = 3 \text{ lb/(ft/sec)}$$

اکنون شما با معادلاتی که در این مسئله بدست آورده اید و با استفاده از یک نرم افزار مانند MATLAB یا MATHEMATICA می توانید به سادگی حرکت چرخ اتوموبیل خود را در در زمان های مختلف تحلیل کنید.

۴- در این مسئله می خواهیم ارتعاش طولی یک مولکول سه اتمی مانند CO_2 را بررسی کنیم. برای این منظور می توان هر پیوند در این مولکول را با یک فنر بدون جرم با ضریب سختی k مدل کرد. مطابق شکل، جابجایی هر اتم از نقطه ی تعادلش را x_i بنامیم.

الف) لاگرانژی این مولکول را بر حسب x_1 ، x_2 ، x_3 و مشتقات آنها به دست آورید.



ب) در پایه ی فوق (x_1, x_2, x_3) آرایه های ماتریس

$$A_{ij} - \omega^2 m_{ij} \quad \text{که در آن} \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{است و} \quad m_{ij} \quad \text{در رابطه}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad \text{را صدق می کند) را نوشته و با استفاده از آن مد}$$

های نوسانی مولکول را به دست آورید.

ج) فرکانس های ارتعاشی طولی مولکول CO_2 تقریباً برابر با $4 \times 10^{13} \text{ Hz}$ و $7 \times 10^{13} \text{ Hz}$ است. مقدار عددی ثابت فنر را برای پیوند های CO تخمین بزنید. آیا عدد به دست آمده معقول است؟ توضیح دهید.