«باسمه تعالی»

* جواب های سری دهم مسائل تمرین مکانیک کوانتومی پیشرفته:

۱) الف- پایه های فضای فوک توصیف کننده این سیستم:

$|0,0\rangle$ ، $|\alpha,0\rangle$ ، $|0,\beta\rangle$ ، $|\alpha,\beta\rangle$

ب-
$$\mathcal{H} = -t\left(c_\alpha^\dagger c_\beta + c_\beta^\dagger c_\alpha\right) + U c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\beta c_\alpha$$

$$\begin{array}{c|cccc|} & |0,0\rangle & |0,\beta\rangle & |\alpha,0\rangle & |\alpha,\beta\rangle \\ \hline \langle 0,0| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle 0,\beta| & 0 & 0 & -t & 0 \\ \langle \alpha,0| & 0 & -t & 0 & 0 \\ \langle \alpha,\beta| & 0 & 0 & 0 & U \end{array}$$

ج- ویژه مقادیر عبارتند از: $\lambda = U$ ، $\lambda = \pm t$ ، $\lambda = 0$

- پس از حل دستگاه داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda = -t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

و

$$\lambda = +t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = U \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲) الف -

$$\mathcal{H} = \varepsilon\left(c_1^+c_1 + c_2^+c_2\right) + \lambda\left(c_1^+c_2^+ + c_2c_1\right)$$

$$\begin{cases} c_1^+ = u D_1^+ + v D_2 \\ c_2^+ = u D_2^+ - v D_1 \end{cases}$$

- تبدیلات بوگولیوبف در حالت دو فرمیونی به صورت مقابل می باشند.

- با تغییر متغیرهای مختلف، انرژی تغییر می کند، ولی پایه ها تغییر نمی کنند.

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = u D_1 + v D_2^+ \\ c_2 = u D_2^+ - v D_1 \end{cases}$$

- در اینجا، u و v را حقیقی می گیریم.

* با توجه به اینکه c_1 و c_2 فرمیون هستند، پس:

$$\{c_1, c_2\} = \{c_1, c_2^+\} = \{c_1^+, c_2\} = \{c_1^+, c_2^+\} = 0$$

- بقیه اعضا جبر نتیجه خوبی می دهند

$$\{c_1, c_1^+\} = 1$$

می خواهیم رفتار فرمیونی داشته باشیم $\Rightarrow \{D_1^+, D_1\} = 1$

$$\Rightarrow \{u D_1^+ + v D_2 , u D_1 + v D_2^+\} = 1 \xrightarrow[u \text{ و } v]{\text{با فرض حقیقی بودن}} u^2 + v^2 = 1$$

$$\mathcal{H} = \varepsilon\Big(\big(u D_1^+ + v D_2\big)\big(u D_1 + v D_2^+\big) + \big(u D_2^+ - v D_1\big)\big(u D_2 - v D_1^+\big)\Big)$$

$$+ \lambda\Big(\big(u D_1^+ + v D_2\big)\big(u D_2^+ - v D_1\big) + \big(u D_2^+ - v D_1\big)\big(u D_1 + v D_2^+\big)\Big)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \left[\varepsilon(u^2 - v^2) - 2\lambda uv\right] D_1^+D_1 + \left[\varepsilon(u^2 - v^2) - 2\lambda uv\right] D_2^+D_2$$

$$+ \left[2\varepsilon v^2 + 2\lambda uv\right] \mathbb{1} + \underbrace{\left[\lambda(u^2 - v^2) + 2\varepsilon uv\right]}_{=0}\left[D_1D_2 - D_1^+D_2^+\right]$$

صفر می گیریم (یک قید دیگر)

و قیدها
$$\begin{cases} u^2+v^2=1 \quad \leftarrow \text{یک دایره} \\ \lambda\,(u^2-v^2) = -2\varepsilon u v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \cos\alpha \\ v = \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \lambda(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -2\varepsilon \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \lambda\cos 2\alpha = -\varepsilon \sin 2\alpha \longrightarrow tg\,2\alpha = -\frac{\lambda}{\varepsilon}$$

جواب دقیق نیست. چون در چهار منطقه وجود دارد. ولی منطقهٔ اول دایره را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{H} = \left(\varepsilon(u^2-v^2) - 2\lambda u v\right)\left(D_1^+D_1 + D_2^+D_2\right)$$
$$+\left\{2\varepsilon v^2 - 2\lambda u v\right\} I$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \left(\varepsilon\cos 2\alpha - \lambda\sin 2\alpha\right)\left(D_1^+D_1 + D_2^+D_2\right)$$
$$+\left[2\varepsilon\sin^2\alpha + \lambda\sin 2\alpha\right] I \quad , \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}}$$

نهایی
$$\Rightarrow \mathcal{H} = \left[\varepsilon\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}} - \lambda\frac{-\lambda/\varepsilon}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}}\right]\left(D_1^+D_1 + D_2^+D_2\right)$$
$$+\left[\varepsilon\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}}\right) + \lambda\frac{-\lambda/\varepsilon}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}}\right] I$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}}\left[\overbrace{\left(\varepsilon + \frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right)}^{b}\left(D_1^+D_1 + D_2^+D_2\right) + \underbrace{\left(\varepsilon\left(\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}} - 1\right) - \frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right)}_{\chi}\right]$$

- انرژی حالت پایه، به علامت ε و λ، و رابطه بین این دو بستگی دارد.

$$\text{if} \quad \varepsilon + \frac{\lambda^2}{\varepsilon} > 0 \begin{cases} 0 \longrightarrow X & \Leftarrow \text{انرژی حالت پایه} \\ 1 \longrightarrow X+\varphi \\ 2 \longrightarrow X+2\varphi \end{cases}$$

$$\text{if} \quad \varepsilon + \frac{\lambda^2}{\varepsilon} < 0 \begin{cases} 0 \longrightarrow X \\ 1 \longrightarrow X+\varphi \\ 2 \longrightarrow X+2\varphi & \longrightarrow \text{انرژی حالت پایه} \end{cases}$$

* ب)

$$\begin{cases} a_1^+ = u b_1^+ + v b_2 \longrightarrow a_1 = u b_1 + v b_2^+ \\ a_2^+ = u b_2^+ + v b_1 \longrightarrow a_2 = u b_2 + v b_1^+ \end{cases}$$

- اگر حقیقی در نظر گرفتیم، ضرایب b_1، b_2 و ... ها جا عوض شود $\Longrightarrow$ به دلیل رابطه جابجایی، $-$ را $+$ گرفتیم.

هیچ شرط اضافه را به جای ندارند.

قید : $[a_1 , a_1^+] = 1 \Longrightarrow \{u^2 - v^2 = 1\}$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = (\varepsilon(u^2+v^2) + 2\lambda uv)(b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2) + (2\varepsilon v^2 + 2\lambda uv) I$$

$$+ \underbrace{(\lambda(u^2+v^2) + 2\varepsilon uv)}_{=0}(b_1^+ b_2^+ + b_1 b_2)$$

قید $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} u = \cosh\alpha \\ v = \sinh\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \tanh 2\alpha = -\frac{\lambda}{\varepsilon} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \mathcal{H} = (\varepsilon \cosh 2\alpha + \lambda \sinh 2\alpha)(b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2) + (\varepsilon(\cosh 2\alpha - 1) + \lambda \sinh 2\alpha) I \right.$$

، $\cosh^2\alpha = \frac{1}{1-tgh^2\alpha}$ ، $\sinh^2\alpha = \frac{-(1-\cosh 2\alpha)}{2}$

$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2}$ (۳

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k',k)|^2$$

، $$f(k,k') \equiv f(q) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int_0^\infty r V(r) \sin qr \, dr$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0}{q}\int_0^\infty r e^{-r^2/a^2} \sin qr \, dr$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0}{q}\int_0^\infty r e^{-r^2/a^2} \left(\frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2}\right) dr$$

$$q^2 = 4k^2 \sin^2\frac{\theta}{2} = 2k^2(1-\cos\theta)$$ و

- انتگرالها به صورت گاوسی می‌باشند و به راحتی قابل حل هستند.