۱-

بار ذره i ام : q_i ،

موقعیت ذره i ام : x_i

ممان دوقطبی الکتریکی $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{x}_i$

هامیلتونی $\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, $\langle d\rangle = \langle\psi|\vec{d}|\psi\rangle$

اگر عملگر وارونی فضایی را π در نظر بگیریم داریم: $\mathcal{H}\pi = \pi\mathcal{H}$

$$\langle\psi|\vec{d}|\psi\rangle = \langle\psi|\pi^{-1}\pi\vec{d}\pi^{-1}\pi|\psi\rangle = \langle\psi'|\pi\vec{d}\pi^{-1}|\psi'\rangle \quad (1)$$

تعریف می‌کنیم $|\psi'\rangle = \pi|\psi\rangle$

طبق تعریف $\vec{d}$ تحت پاریته فرد است: $\pi\vec{d}\pi^{-1} = \pi\sum_i q_i\vec{x}_i\pi^{-1} = \sum q_i\pi\vec{x}_i\pi^{-1} = -\vec{d}$

$$(1) \Rightarrow \langle\psi|\vec{d}|\psi\rangle = -\langle\psi'|\vec{d}|\psi'\rangle$$

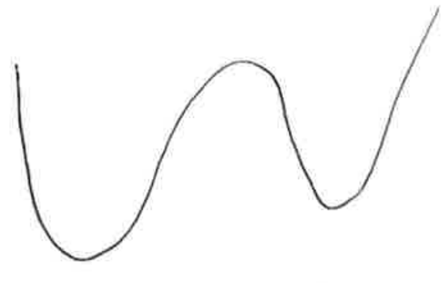
$$\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow \pi\mathcal{H}\pi^{-1}\pi|\psi\rangle = E\pi|\psi\rangle \Rightarrow \mathcal{H}|\psi'\rangle = E|\psi'\rangle$$

از آنجا که سیستم غیر تبهگن است پس $|\psi'\rangle = c|\psi\rangle$, $c = \pm 1$

$$\Rightarrow \langle\psi|\vec{d}|\psi\rangle = -\langle\psi'|\vec{d}|\psi'\rangle = -c^2\langle\psi|\vec{d}|\psi\rangle = -\langle\psi|\vec{d}|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\vec{d}|\psi\rangle = 0$$

۲- یک چاه پتانسیل نامتقارن دوگانه در نظر بگیرید.



فرض کنید ابتدا سیستم در چاه چپ باشد.

$$|\psi(t=0)\rangle = |L\rangle$$

در زمان‌های بعد حالت سیستم $|\psi(t)\rangle$ است.

$$|\psi(t)\rangle = a_l(t)\,|L\rangle + a_R(t)\,|R\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}\,|\psi(t=0)\rangle = e^{-iHt}\,|L\rangle$$

$$a_R(t) = \langle R|\psi(t)\rangle = \langle R|\,e^{-iHt}\,|L\rangle$$

احتمال تونل‌زنی چپ به راست $\quad |a_R(t)|^2 = \langle L|e^{+iHt}|R\rangle\langle R|e^{-iHt}|L\rangle$

به همین شکل می‌توان نوشت (با فرض اینکه سیستم ابتدا در R باشد).

احتمال تونل‌زنی راست به چپ $\quad |a_L(t)|^2 = \langle R|e^{+iHt}|L\rangle\langle L|e^{-iHt}|R\rangle$

حال اگر سیستم تحت وارونی زمان ناوردا باشد داریم.

$$|a_R(t)|^2 = |a_R(-t)|^2$$

$$\Rightarrow |a_R(-t)|^2 = \underbrace{\langle L|\,e^{-iHt}\,|R\rangle\langle R|\,e^{+iHt}\,|L\rangle}_{\text{این عبارت همان احتمال تونل راست به چپ است}} = |a_L(t)|^2$$

۳- یک بعدی در جعبه متقارن

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}n^2 \qquad n = 1, 3, 5\ldots \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos(k_n a)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{2a} \qquad n = 2, 4, 6, \ldots \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(k_n a)$$

الف

برای دستگاه دو ذره‌ای بدون برهم کنش:

$$E = E_{n_1} + E_{n_2}$$

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{8a^2}\left(\frac{n_1^2}{m_1} + \frac{n_2^2}{m_2}\right) = \frac{\pi^2\hbar^2}{8a^2 m}(n_1^2 + n_2^2)$$

بنابراین چهار تراز اول انرژی:

(n_1, n_2)	E
$(1, 1)$	$\frac{\pi^2\hbar^2}{8a^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$
$(1, 2)$	$\frac{5\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$
$(2, 2)$	$\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$
$(3, 1)$	$\frac{10\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$

ب -

ب۱- اگر $n_1=n_2$ باشد واگنی یک (۱) ، اگر $n_1 \neq n_2$ واگنی چهار (۴)

ب۲- اگر $n_1=n_2$ باشد واگنی چهار (۴) ، اگر $n_1 \neq n_2$ واگنی هشت (۸)

ب۳- اگر $n_1=n_2$ باشد واگنی شش (۶) ، اگر $n_1 \neq n_2$ واگنی نه (۹)

۴ - دستگاهی از اتمهای هیدروژن در حالت پایه بین صفحات یک خازن صفحه موازی قرار دارند . ولتاژ مثبتی به خازن اعمال کنیم تا میدان الکتریکی همگن زیر تولید شود :

$$E = 0 \qquad t<0$$

$$E = E_0 \exp(-t/\tau) \qquad t>0$$

الف) تا مرتبه اول نشان دهید که پس از گذشت زمانی طولانی نسبت اتمهای در حالت $2p$ $(m=0)$ برابر است با :

$$2^{15}/3^{10} \quad \frac{a_0^2 e^2 E_0^2}{\hbar^2(\omega^2+1/\tau^2)}$$

که در آن a_0 شعاع بور و $\hbar\omega$ اختلاف انرژی بین حالت $2p$ و پایه است .

ب) نسبت اتمهای در حالت $2s$ چقدر است ؟

روابط زیر می تواند مفید باشد :

$$u_{100} = 2/\sqrt{4\pi} \; 1/a_0^{3/2} \exp(-r/a_0)$$

$$u_{210} = 1/\sqrt{4\pi} \; \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \; r/a_0 \exp(-r/2a_0)\cos\theta$$

$$\int_0^\infty r^4 \exp(-\beta r)\,dr = 4!/\beta^5$$

حل : اگر هامیلتونی $H^{(1)}$ در $t=0$ به دستگاهی در حالت اولیه $|k\rangle$ و انرژی E_k اعمال شود ، نظریه اختلال وابسته به زمان مرتبه اول نتیجه می دهد که احتمال گذار به حالت $|j\rangle$ با انرژی E_j در زمان t برابر $|c_j|^2$ است که در آن :

$$c_j = 1/i\hbar \int_0^t \langle j|H^{(1)}(t')|k\rangle \exp(i\omega t')\,dt' \qquad \hbar\omega = E_j - E_k$$

$H^{(1)}(t')$ در مسئله حاضر پتانسیل الکترون در میدان الکتریکی اعمال شده در راستای z است یعنی :

$$H^{(1)}(t') = eE_0 z \exp(-t'/\tau) \quad , \quad t'>0$$

$$c_j = eE_0/i\hbar \langle j|z|k\rangle \int_0^t \exp\{(i\omega - 1/\tau)t'\}\,dt' \quad , \quad t=\infty \text{ در}$$

که انتگرالگیری نسبت به زمان نتیجه زیر را می دهد :

$$\int_0^\infty \exp\{(i\omega-1/\tau)t'\}\,dt' = \frac{1}{i\omega-1/\tau}\left[\exp\{(i\omega-1/\tau)t'\}\right]_0^\infty = -\frac{1}{i\omega-1/\tau}$$

ادامه ٤

$$\Rightarrow c_j' = \frac{eE_0}{\hbar(\omega + i/\tau)} \langle j|z|k\rangle$$

حالت اولیه حالت پایه هیدروژن ، یعنی اعداد کوانتومی $n=1$ ، $l=0$ ، $m=0$ است و در حالت نهایی دارای $n=2$ ، $l=1$ ، $m=0$ است. با استفاده از رابطه $z = r\cos\theta$ عنصر ماتریسی را در مختصات کروی قطبی محاسبه می‌کنیم. بنابراین:

$$\langle j|z|k\rangle = \int_{\text{تمام فضا}} u_{210}^{*}\, r\cos\theta\, u_{100}\, r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \langle j|z|k\rangle = 1/2^{3/2}\ 1/a_0^{\,2} \int_0^{\infty} r^4 \exp(-3r/2a_0)\, dr \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= 4!/2^{3/2}\,(2/3)^6\, a_0$$

$$\Rightarrow |c_j'|^2 = 2^{15}/3^{10}\ \frac{a_0^{\,2} e^2 E_0^{\,2}}{\hbar^2(\omega^2 + 1/\tau^2)}$$

ب) احتمال گذار به حالت 200 صفر است. پاریتهٔ توابع u_{100} و u_{200} مثبت و پاریتهٔ z منفی است. بنابراین پاریتهٔ حاصلضرب $u_{100}\, z\, u_{200}$ که از انتگرال‌گیری روی همهٔ فضا به دست می‌آید صفر است.

$$\mathcal{H} = \sum_{jk} \alpha_{jk} a_j^\dagger a_k$$

$$b_i = \sum_k \beta_{ik} a_k$$

از آنجا که قرار است عملگر b معرف شبه ذرات فرمیونی باشد پس باید:

$$\{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{ij}\mathbb{1} \Rightarrow \sum_{m,l} \beta_{il}\beta_{jm}^* \{a_l, a_m^\dagger\} = \{b_i, b_j^\dagger\}$$

می‌دانیم $\{a_l, a_m^\dagger\} = \delta_{lm}\mathbb{1}$, $\beta_{jm}^* = \beta_{mj}^\dagger = (\beta^\dagger)_{mj}$

$$\Rightarrow \{b_i, b_j^\dagger\} = \sum_{m,l} (\beta)_{il}(\beta^\dagger)_{mj}\,\delta_{lm}\,\mathbb{1} = (\beta\beta^\dagger)_{ij}\,\mathbb{1}$$

$\Rightarrow \beta\beta^\dagger = \mathbb{1} \Longrightarrow$ β باید یکانی باشد

با این وصف:

$$\mathcal{H} = \sum_{lm} (\beta\alpha\beta^\dagger)_{lm}\, b_l^\dagger b_m$$

برای آنکه هامیلتونی قطری شود باید ماتریس $\beta\alpha\beta^\dagger$ قطری باشد و چون α یک ماتریس هرمیتی است پس β بایستی آنگونه انتخاب شود که α را قطری کند.
بنابراین β ماتریس یکانی است که α را قطری می‌کند.

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (۷$$

و $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 Z_1^2 Z_2^2 e^4 \mu^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty \sin(qr)\, dr \right|^2$$

که:

$$\int_0^\infty \sin(qr)\, dr = \lim_{\lambda \to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda r} \sin(qr)\, dr =$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \to 0} \left[\int_0^\infty e^{-(\lambda - iq) r} dr - \int_0^\infty e^{-(\lambda + iq) r} dr \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \to 0} \left[\frac{1}{\lambda - iq} - \frac{1}{\lambda + iq} \right] = \frac{1}{q}$$

- از آنجایی که $q = 2k \sin(\theta/2)$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2 Z_1 \mu Z_2 e^2}{\hbar^2 q^2} \right)^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 \mu e^2}{2 \hbar^2 k^2} \right) \sin^{-4}(\theta/2)$$

$$= \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16 E^2} \sin^{-4}(\theta/2)$$

- که $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ انرژی جنبشی ذره ورودی است. این رابطه به عنوان فرمول راترفورد یا سطح مقطع کولمبی شناخته می‌شود.